Об асимптотике спектра оператора типа Хартри вблизи границ спектральных кластеров

А. В. Перескоков (Москва, Россия)
pereskokov62@mail.ru

Рассматривается задача на собственные значения для нелинейного оператора типа Хартри в $L^2(\mathbb{R}^2)$

$$(\mathbf{H}_0 + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} W(|q-q'|^2) \mid \psi(q') \mid^2 dq')\psi = \lambda\psi, \quad \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2}\right) + \frac{q_1^2+q_2^2}{2}$$

– двумерный осциллятор, $W(x) = w_0 + w_1 x + w_2 x^2$ – произвольный многочлен второй степени с вещественными коэффициентами, $\hbar > 0$ и $\varepsilon > 0$ – малые параметры, причем $\varepsilon \ll \hbar$. Для определенности рассмотрим случай, когда $\varepsilon = \hbar^2$, а $w_2 > 0$.

Уравнение самосогласованного поля во внешнем поле, содержащее интегральную нелинейность типа Хартри с гладким или негладким потенциалом самодействия, играет фундаментальную роль в квантовой теории, а также при описании коллективных возбуждений в молекулярных цепочках и в молекулах ДНК.

Особенностью задачи (1) является то, что она относится к классу резонансных: обе частоты двумерного осциллятора $\mathbf{H}_0$ равны 1. Но тогда лучевой метод и общая теория комплексного ростка Маслова неприменимы. Метод построения квазиклассических асимптотик для уравнений с частотными резонансами был разработан в серии работ М.В.Карасева, начиная с [1].

Особый интерес представляют решения уравнений типа (1), отвечающие границам спектральных кластеров вблизи собственных значений невозмущенного уравнения (при $\varepsilon = 0$). В работе [2] на примере спектральной задачи для двумерного возмущенного осциллятора был предложен метод нахождения серий асимптотических собственных значений вблизи границ спектральных кластеров. Он основан на новом интегральном представлении.

В данной работе этот метод был использован для нахождения асимптотических собственных значений задачи (1) вблизи границ спектральных кластеров. После применения алгебраического усреднения и когерентного преобразования к задаче (1) на l-ом неприводимом представлении алгебры симметрий невозмущенного оператора мы приходим к задаче на собственные значения в пространстве $\mathcal{P}_\ell$ полиномов степени не выше $\ell \sim 1/\hbar$. Искомый полином удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка. Вначале изучается многоточечная спектральная задача в классе голоморфных функций с равными нулю характеристическими показателями в конечных особых точках. Далее асимптотика искомого полинома получается с помощью операции проектирования на подпространство $\mathcal{P}_\ell$, обобщающей интегральное представление Дирака.

Вблизи нижних границ спектральных кластеров асимптотические собственные значения имеют вид [3]

$$\lambda = \lambda_{k,\ell} = \ell\hbar + \hbar + (w_0 + 2\ell\hbar w_1 + 6\ell^2\hbar^2 w_2)\hbar^2 +$$

$$+(2w_1 + 2\ell\hbar w_2(2k+7)))\hbar^3 + O(\hbar^4), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \hbar \to 0. \quad (2)$$

Здесь число $\ell \in \mathbb{N}$ имеет порядок $\hbar^{-1}$ и определяет собственное значение $\hbar(\ell+1)$ невозмущенного оператора $\mathbf{H}_0$. Им соответствует однопараметрическое семейство асимптотических собственных функций, которые получаются из полиномов

$$\Phi_{k,\ell}(\overline{z}) = \sqrt{\frac{\ell^k}{2^\ell k!}}[(\overline{z}-i)^{\ell-k}(\overline{z}+i)^k \cos\alpha + (\overline{z}+i)^{\ell-k}(\overline{z}-i)^k \sin\alpha],$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, применением когерентного преобразования и деусредняющего преобразования.

Формула, аналогичная (2), справедлива и вблизи верхних границ спектральных кластеров [4].

Литература

1. *Karasev M. V.* Birkhoff resonances and quantum ray method. Proc. Intern. Seminar "*Days of Diffraction* - 2004". St. Petersburg and Steklov Math. Institute. St. Petersburg. 2004. pp. 114-126.

2. *Pereskokov A. V.* Asymptotics of the spectrum and quantum averages of a perturbed resonant oscillator near the boundaries of spectral clusters. Izv.Math. 2013. Vol. 77, No. 1, pp. 163–210.

3. *Pereskokov A. V.* Semiclassical asymptotics of the spectrum near the lower boundary of spectral clusters for a Hartree-type operator. Math. Notes. 2017. Vol. 101, No. 6, pp. 1009-1022.

4. *Pereskokov A. V.* Semiclassical asymptotic spectrum of a Hartree-type operator near the upper boundary of spectral clusters. Theoret. and Math. Phys. 2014. Vol. 178, No. 1, pp. 76–92.