

# КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ АСИМПТОТИКА СПЕКТРА АТОМА ВОДОРОДА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ ВБЛИЗИ ГРАНИЦ СПЕКТРАЛЬНЫХ КЛАСТЕРОВ

ПЕРЕСКОКОВ А.В.

Рассмотрим нерелятивистский гамильтониан атома водорода в однородном электромагнитном поле

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_0 + \varepsilon \mathbb{M}_3 + \varepsilon e_1 x_1 + \varepsilon^2 \mathbb{W}, \quad (1)$$

где

$$\mathbb{H}_0 = -\Delta - |x|^{-1}, \quad \mathbb{M}_3 = ix_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - ix_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \mathbb{W} = (x_1^2 + x_2^2)/4.$$

Здесь через  $x = (x_1, x_2, x_3)$  обозначены декартовы координаты в  $\mathbb{R}^3$ ,  $\Delta$  — оператор Лапласа, магнитное поле направлено вдоль оси  $x_3$ , а электрическое поле вдоль оси  $x_1$ . Число  $e_1 > 0$  — напряженность электрического поля,  $\varepsilon > 0$  — малый параметр.

Задача об атоме водорода в электромагнитном поле представляет большой физический и математический интерес. Особенностью данной задачи является наличие в гамильтониане одновременно и электрического, и магнитного полей, которые ортогональны друг другу. Это приводит к образованию резонансных спектральных кластеров около собственных значений невозмущенного атома водорода [1].

Алгебраический метод построения асимптотики спектра и собственных функций атома водорода был предложен в работе [2]. Однако этот метод не применим для состояний системы, которые отвечают границам спектральных кластеров. В работе [3] был предложен метод построения асимптотики спектра около границ кластеров, основанный на новом интегральном представлении для асимптотических собственных функций. С его помощью доказано [4], что вблизи верхних границ спектральных кластеров имеется серия собственных значений оператора (1) со следующей асимптотикой

$$\mathcal{E}_k = -\frac{1}{4n^2} + \varepsilon m \sqrt{9n^2 e_1^2 + 1} - \varepsilon^2 n^4 e_1^2 (4n^2 + 9n|m| - 6m^2) -$$

$$-18\varepsilon^2 n^4 e_1^2 (n - |m|)(k + 1/2) + O(\varepsilon^2 n^4) + O(\varepsilon^3 n^{10}), \quad (2)$$

где  $\varepsilon \rightarrow +0$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , числа  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  удовлетворяют условиям  $1 \ll n \ll \varepsilon^{-1/5}$ ,  $1 \ll |m| < n$ . Здесь  $e_1$  принимает произвольные положительные значения. Случай малых значений  $e_1$  рассмотрен в [5].

Формула (2) описывает расщепление спектра (т.е. эффект Зеемана—Штарка) для атома водорода в ортогональных электрическом и магнитном полях. Поскольку в гамильтониан (1) входит параметр  $e_1$ , то возникает однопараметрическое семейство уравнений Гойна, к которым сводится усредненная задача в неприводимом представлении алгебры Карасева—Новиковой  $\mathcal{F}_{quant}$  с квадратичными коммутационными соотношениями [1, 2]. Асимптотика решений уравнений Гойна строится с помощью комплексного метода ВКБ и метода согласования асимптотических разложений.

Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2020-0022).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Карасев М. В., Новикова Е. М. Алгебра с полиномиальными коммутационными соотношениями для эффекта Зеемана—Штарка в атоме водорода // ТМФ. 2005. Т. 142. No. 3. с. 530–555.
- [2] Карасев М. В., Новикова Е. М. Представление точных и квазиклассических собственных функций через когерентные состояния. Атом водорода в магнитном поле // ТМФ. 1996. Т. 108. No. 3. с. 339–387.
- [3] Перескоков А. В. Асимптотика спектра и квантовых средних возмущенного резонансного осциллятора вблизи границ спектральных кластеров // Изв. РАН, сер. мат. 2013. Т. 77. No. 1. с. 165–210.
- [4] Migaeva A. S., Pereskokov A. V. Semiclassical asymptotics of the spectrum of the hydrogen atom in an electromagnetic field near the upper boundaries of spectral clusters // J. Math. Sci. (N.Y.) 2020. v. 251. no. 6. pp. 850–875.
- [5] Pereskokov A. V. On the asymptotics of the spectrum of the hydrogen atom in orthogonal electric and magnetic fields near the upper boundaries of spectral clusters // Russ. J. Math. Phys. 2019. v. 26. no. 3. pp. 391–400.

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ», НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ», РОССИЯ

*E-mail address:* pereskokov62@mail.ru