

# ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ДЕФОРМАЦИОННОГО ПОВЕДЕНИЯ СВЕРХПЛАСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

*В.В. Миколаенко*

*Национальный исследовательский университет  
"Высшая школа экономики",  
департамент прикладной математики  
МИЭМ НИУ ВШЭ*

## Аннотация

Листовые заготовки из сверхпластичных материалов используются в технологиях сверхпластической газовой формовки для производства тонкостенных изделий сложной геометрической формы. При реализации такой технологии необходимо корректно задать режим давления и температуры, чтобы заготовка вошла в состояние сверхпластичности, при котором возможно её бездефектное формоизменение при больших деформациях. Режим давления и температуры устанавливаются исходя из модели деформационного поведения материала, которая связывает степень и скорость деформации с напряжением. Такую модель строят так, чтобы она аппроксимировала серию кривых «напряжение-деформация», полученных экспериментально. Как правило, такая модель содержит множество параметров. В данной работе предложен метод построения такой модели, позволяющий минимизировать количество параметров при заданной точности модели. Разработанный метод был опробован на примере построения свойств сплава системы Al-Mg-Fe-Ni.

## Введение

Сверхпластичность – это состояние материала, которое при бездефектном формоизменении допускает деформации, значительно превышающие максимально возможные для этого материала в обычном состоянии [1]. При сверхпластической газовой формовке листовых заготовок используются режимы давления и температуры, учитывающие особенности формоизменения деформируемого сплава [2,3]. Данные особенности заложены в модели деформационного поведения материала, связывающей напряжения с деформациями и скоростями деформации [4]. Существует множество экспериментальных методик, позволяющих получить такую модель [5–7]. Основной экспериментальной методикой является испытание плоских образцов на растяжение при постоянной скорости деформации [8]. Процедура проведения такого испытания, геометрические особенности установки и образца, а также интерпретации результатов испытаний описаны в стандарте ASTM-E2448 [9]. Интерпретация результатов испытания по экспериментальным данным заключается в построении кривой «напряжение-деформация» по измеренным за время испытания силам. По серии таких кривых, полученных из испытаний с разными постоянными скоростями деформации, проводят построение модели деформационного поведения материала, аппроксимирующей полученные зависимости.

При интерпретации экспериментальных данных существует проблема неоднородности распределения скоростей деформации в образце, что может приводить к ошибкам в оценке напряжений порядка 20%. Данная проблема обсуждалась во многих работах [10–13]. Для решения данной проблемы в работе [14] была предложена итерационная процедура обратного анализа, на каждом шаге которой проводится конечно-элементное моделирование, позволяющее учесть особенности течения материала в образце. Сначала конечно-элементное моделирование проводится при использовании свойств материала, построенных на экспериментальных данных, но

после на каждой итерации модель деформационного поведения уточняется, при этом используются результаты конечно-элементного моделирования. На каждом шаге итерационной процедуры после проведения моделирования проводится построение уточнённой модели деформационного поведения материала.

В данной работе решается задача построения модели деформационного поведения материала по серии кривых «напряжение-деформация», полученных при разных постоянных скоростях деформации. Эта задача заключается в построении начального приближения и его дальнейшем уточнении.

## Процедура построения модели деформационного поведения материала

Модель деформационного поведения материала представляет собой зависимость, связывающую напряжения  $\sigma$  с деформациями  $\varepsilon$  и скоростями деформации  $\dot{\varepsilon}$ :

$$\sigma = \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}). \quad (1)$$

Процедура построения начального приближения совпадает с процедурой, опубликованной в работах [15,16]. При этом используются уравнения состояния деформируемой среды:

$$\dot{\varepsilon} = A_1 \sigma^n, \quad (2)$$

$$\dot{\varepsilon} = A_2 \exp(b\sigma), \quad (3)$$

$$\dot{\varepsilon} = A_3 (\sinh(\alpha\sigma))^\gamma, \quad (4)$$

где  $A_1, A_2, A_3, b, n, \gamma, \alpha$  – коэффициенты, описывающие модель материала.

После логарифмирования уравнений (2) и (3) с помощью линейной регрессии вычисляют коэффициенты материала  $n$  и  $b$  соответственно:

$$\ln \dot{\varepsilon} = \ln A_1 + n \ln \sigma \Rightarrow n, \quad (5)$$

$$\ln \dot{\varepsilon} = \ln A_2 + b\sigma \Rightarrow b. \quad (6)$$

На основе вычисленных коэффициентов из уравнений (5) и (6) определяют коэффициент  $\alpha$  из уравнения (4):

$$\alpha = b/n. \quad (7)$$

После логарифмирования уравнения (4) и подстановки в него коэффициента  $\alpha$  из уравнения (7) с помощью линейной регрессии вычисляют коэффициенты материала  $A_3$  и  $\gamma$ , при этом удобно ввести обозначение  $\beta = \ln A_3$ :

$$\ln \dot{\varepsilon} = \ln A_3 + \gamma \ln \sinh\left(\frac{b}{n}\sigma\right) \Rightarrow \beta, \gamma. \quad (8)$$

Для построения непрерывной зависимости проводят аппроксимацию полученного набора коэффициентов материала  $a_i, \beta_i$  и  $\gamma_i$  полиномами пятой степени:

$$\alpha(\varepsilon) = K_1 + K_2\varepsilon + K_3\varepsilon^2 + K_4\varepsilon^3 + K_5\varepsilon^4 + K_6\varepsilon^5, \quad (9)$$

$$\beta(\varepsilon) = K_7 + K_8\varepsilon + K_9\varepsilon^2 + K_{10}\varepsilon^3 + K_{11}\varepsilon^4 + K_{12}\varepsilon^5, \quad (10)$$

$$\gamma(\varepsilon) = K_{13} + K_{14}\varepsilon + K_{15}\varepsilon^2 + K_{16}\varepsilon^3 + K_{17}\varepsilon^4 + K_{18}\varepsilon^5. \quad (11)$$

Модель деформационного поведения материала из уравнения (1) получают, выражая напряжения  $\sigma$  из уравнения (4) и используя в качестве коэффициентов материала непрерывные зависимости из уравнений (9), (10) и (11):

$$\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = \sigma(\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon), \gamma(\varepsilon), \dot{\varepsilon}) = \frac{1}{\alpha} \ln \left( (\dot{\varepsilon}/e^\beta)^{1/\gamma} + \sqrt{1 + (\dot{\varepsilon}/e^\beta)^{2/\gamma}} \right). \quad (12)$$

Полученное начальное приближение обладает следующими недостатками: оно не обеспечивает минимума среднеквадратичного отклонения модели от экспериментальных данных, а также включает в себя 18 параметров, что не позволяет поставить задачу минимизации в 18-мерном пространстве.

При уточнении модели деформационного поведения материала предлагается для каждого значения степеней деформации  $\varepsilon_i$  скорректировать соответствующий ему набор коэффициентов материала  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  с помощью

метода Нелдера-Мида, минимизируя среднеквадратичное отклонение рассчитываемых напряжений от экспериментальных:

$$d_i = \sum_j^M (\sigma_{i,j}^{\text{экс}} - \sigma(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \epsilon_j))^2, \quad (13)$$

где  $\sigma_{i,j}^{\text{экс}}$  – значение напряжений, соответствующих деформации  $\epsilon_j$  у кривой, полученной из испытания со скоростью деформации  $\dot{\epsilon}_j$ ,  $M$  – количество испытаний с разными скоростями деформации. Используя в качестве начального приближения рассчитанные ранее коэффициенты материала  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  и  $\gamma_i$ , получим набор скорректированных коэффициентов  $\tilde{\alpha}_i$ ,  $\tilde{\beta}_i$  и  $\tilde{\gamma}_i$ . Каждый из наборов коэффициентов материала, соответствующий  $\epsilon_i$  деформации, скорректирован по отдельности. Из-за отсутствия явного локального минимума результаты получаются зашумленными, что приводит к большим ошибкам при аппроксимации.

С целью уменьшения разброса коэффициентов предлагается последовательно строить аппроксимации  $\tilde{\alpha}(\epsilon)$ ,  $\tilde{\beta}(\epsilon)$  и  $\tilde{\gamma}(\epsilon)$ , проводя последовательный запуск методов оптимизации на оставшихся неаппроксимированных коэффициентах. Причем аппроксимации могут проводиться в любом порядке, используя полиномы любой степени. Полученные в результате аппроксимации будут включать в себя параметры  $K_{\alpha 0}, \dots, K_{\alpha n}, K_{\beta 0}, \dots, K_{\beta m}, K_{\gamma 0}, \dots, K_{\gamma k}$ , описывающие скорректированную модель деформационного поведения материала  $\tilde{\sigma}(\epsilon, \dot{\epsilon})$ :

$$\tilde{\alpha}(\epsilon) = K_{\alpha 0} + K_{\alpha 1}\epsilon + K_{\alpha 2}\epsilon^2 + \dots + K_{\alpha n}\epsilon^n, \quad (14)$$

$$\tilde{\beta}(\epsilon) = K_{\beta 0} + K_{\beta 1}\epsilon + K_{\beta 2}\epsilon^2 + \dots + K_{\beta m}\epsilon^m, \quad (15)$$

$$\tilde{\gamma}(\epsilon) = K_{\gamma 0} + K_{\gamma 1}\epsilon + K_{\gamma 2}\epsilon^2 + \dots + K_{\gamma k}\epsilon^k, \quad (16)$$

где  $n$ ,  $m$  и  $k$ , – степени соответствующих полиномов.

Множество построенных моделей получено из-за разной последовательности аппроксимации коэффициентов материала и из-за разного количества параметров, начиная от трёх параметров, что соответствует аппроксимации коэффициентов тремя полиномами нулевой степени. Среди данного множества отбирается модель, удовлетворяющая требуемому количеству параметров модели или требуемой точности.

### Обработка экспериментальных данных

Предложенный метод построения модели деформационного поведения материала был автоматизирован с помощью Python скриптов и опробован на экспериментальных данных, полученных из испытаний на растяжение плоских образцов из сплава системы Al-Mg-Fe-Ni [17]. Серия испытаний проводилась при температуре  $460^\circ\text{C}$  и при следующих постоянных скоростях деформации:  $0.002\text{c}^{-1}$ ,  $0.005\text{c}^{-1}$ ,  $0.01\text{c}^{-1}$ ,  $0.03\text{c}^{-1}$  и  $0.06\text{c}^{-1}$ . Геометрические параметры образца и установки, проводящей испытания, демонстрируются на рисунке 1.

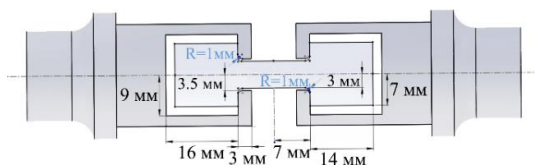


Рис. 1 Геометрические параметры образца и установки

Начальное приближение модели деформационного поведения материала  $\sigma(\epsilon_i, \dot{\epsilon}_j)$  изображено на рисунке 2 (непрерывными линиями) в сравнении с экспериментальными данными  $\sigma_{i,j}^{\text{экс}}$  (пунктирными линиями с маркерами).

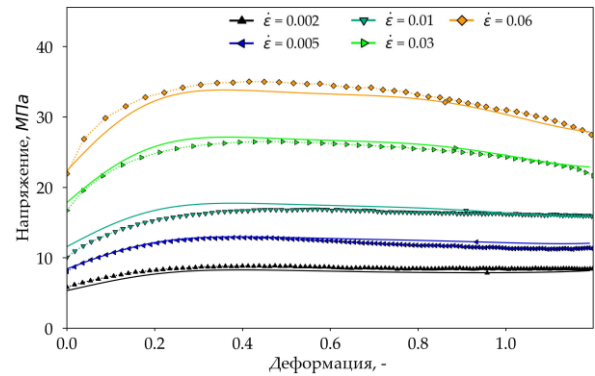


Рис. 2 Сравнение кривых напряжения-деформации, полученных из экспериментальных данных, с начальным приближением свойств материала

Затем было получено множество уточнённых моделей с разным количеством параметров при разной последовательности аппроксимаций коэффициентов материала. Далее для каждой из последовательностей и для каждого из параметров среди имеющихся моделей были рассчитаны среднеквадратичные отклонения от экспериментальных данных и выбраны лучшие. Результат такого отбора изображён на рисунке 3, где в легенде приведены последовательности аппроксимаций, по оси абсцисс количество параметров модели, а по оси ординат среднеквадратичные отклонения напряжений. Также на рисунке 3 пунктирной линией отображена точность, получаемая с помощью начального приближения.

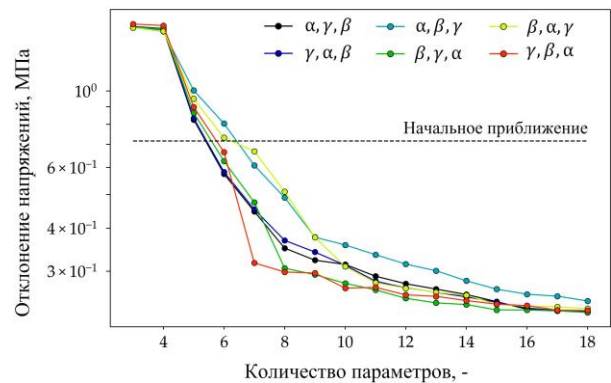


Рис. 3 Отклонения скорректированных моделей от кривых напряжения-деформации, полученных из экспериментальных данных

Исходя из полученных результатов видно, что у скорректированной модели с 7 параметрами удастся повысить точность более, чем в два раза, в сравнении с начальным приближением, при построении которого использовалось 18 параметров. Полученная скорректированная модель построена при последовательном запуске методов оптимизации, при котором аппроксимации коэффициентов материала проводились в следующем порядке:  $\gamma$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$ . В таблице 1 приведены параметры такой модели.

Табл. 1 Параметры модели

$\alpha(\epsilon)$		$\beta(\epsilon)$		$\gamma(\epsilon)$	
$K_{\alpha 0}$	0,00426	$K_{\beta 0}$	2,3627	$K_{\gamma 0}$	2.57385
$K_{\alpha 1}$	0,00153			$K_{\gamma 1}$	-7,12
$K_{\alpha 2}$	0,0232			$K_{\gamma 2}$	1,7672

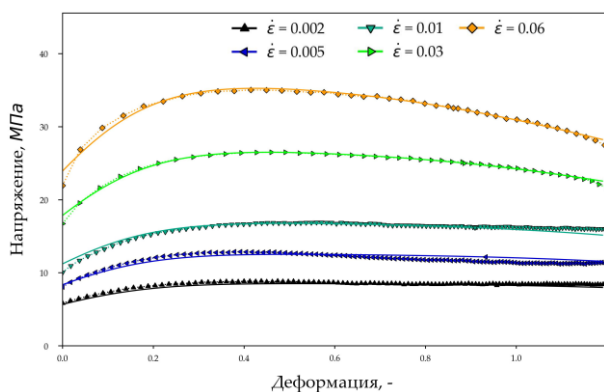
В таблице 2 приведено сравнение среднеквадратичных отклонений экспериментальных

данных  $\sigma_{i,j}^{\text{эксп}}$  от начального приближения  $\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$  и от скорректированной модели  $\tilde{\sigma}(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ , параметры которой описаны в таблице 1.

**Табл. 2** Отклонение кривых напряжения деформации из экспериментальных данных от полученных моделей

Скорости деформации, $\text{c}^{-1}$	Отклонение $\sigma_{i,j}^{\text{эксп}}$ от $\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ , МПа	Отклонение $\sigma_{i,j}^{\text{эксп}}$ от $\tilde{\sigma}(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ , МПа
$\dot{\varepsilon}_1 = 0.002\text{c}^{-1}$	0,556	0,277
$\dot{\varepsilon}_2 = 0.005\text{c}^{-1}$	0,478	0,43
$\dot{\varepsilon}_3 = 0.01\text{c}^{-1}$	0,878	0,114
$\dot{\varepsilon}_4 = 0.03\text{c}^{-1}$	0,617	0,338
$\dot{\varepsilon}_5 = 0.06\text{c}^{-1}$	1,047	0,355
<b>Среднее:</b>	0,715	0,317

Из таблицы 2 видно, что точность удалось повысить более, чем в два раза, при меньшем количестве параметров. На рисунке 4 представлено сравнение экспериментальных данных  $\sigma_{i,j}^{\text{эксп}}$  (пунктирные линии с маркерами) со скорректированной моделью  $\tilde{\sigma}(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$  (непрерывные линии), параметры которой описаны в таблице 1.



**Рис. 4** Сравнение кривых напряжения-деформации, полученных из экспериментальных данных, со скорректированной моделью

По рисунку 4 видно, что кривые, полученные с помощью скорректированной модели, согласуются с экспериментальными данными лучше, чем это было на рисунке 2, где использовалось начальное приближение.

### Заключение

В данной работе предложен метод построения модели деформационного поведения материала по серии кривых «напряжение-деформация», позволяющий минимизировать количество параметров, требуемых для описания свойств материала при заданных требованиях на точность модели. Разработанная процедура была автоматизирована с помощью Python скриптов и опробована на экспериментальных данных, полученных из серии испытаний на одноосное растяжение плоских образцов сплава системы Al-Mg-Fe-Ni. В результате была построена модель, которая в сравнении с начальным приближением обеспечивает более чем двукратное повышение точности при почти в три раза меньшем количестве параметров. Результаты исследования будут использоваться в дальнейшем при доработке методики коррекции экспериментальных данных из работы [14].

### Благодарность

Автор выражает благодарность лаборатории «Ультрамелкозернистых металлических материалов» НИТУ «МИСиС» за предоставление экспериментальных данных.

### Список литературы:

- 1 Sherby O. D., Wadsworth J. Superplasticity-Recent advances and future directions. - 1989. - *Prog. Mater. Sci.*
- 2 Jarrar F., Sorgente D., Aksenov S., Enikeev F. On the challenges and prospects of the superplastic forming process. - 2018. *Materials Science Forum* vol 941 MSF (Trans Tech Publications Ltd) pp 2343–8
- 3 Aksenov S. A. S. A. S. A., Kolesnikov A. V. A. V., Mikhaylovskaya A. V. A. V. Design of a gas forming technology using the material constants obtained by tensile and free bulging testing. - 2016. - *J. Mater. Process. Technol.* - № 237. - с. 88–95.
- 4 Enikeev F. U., Kruglov A. A. An analysis of the superplastic forming of a thin circular diaphragm. - 1995. - *Int. J. Mech. Sci.*
- 5 Giuliano G., Franchitti S. On the evaluation of superplastic characteristics using the finite element method. - 2007. - *Int. J. Mach. Tools Manuf.* - № 47. - с. 471–6.
- 6 El-Morsy A., Akkus N., Manabe K., Nishimura H. Evaluation of superplastic characteristics of tubular materials by multi-tube bulge test. - 2006. - *Mater. Lett.*
- 7 Vulcan M., Siegert K., Banabic D. The influence of pulsating strain rates on the superplastic deformation behaviour of Al-alloy AA5083 investigated by means of cone test. - 2004. *Materials Science Forum*
- 8 Yasmeen T., Shao Z., Zhao L., Gao P., Lin J., Jiang J. Constitutive modeling for the simulation of the superplastic forming of TA15 titanium alloy. - 2019. - *Int. J. Mech. Sci.*
- 9 E2448-11 Standard Test Method for Determining the Superplastic Properties of Metallic Sheet Materials. - 2011. - *ASTM B. Stand.*
- 10 Aksenov S., Mikolaenko V. The effect of material properties on the accuracy of superplastic tensile test. - 2020. - *Metals (Basel).*
- 11 Abu-Farha F., Nazzal M., Curtis R. Optimum Specimen Geometry for Accurate Tensile Testing of Superplastic Metallic Materials. - 2011. - *Exp. Mech.*
- 12 Bate P. S., Ridley N., Sotoudeh K. Effect of gauge length in superplastic tensile tests. - 2008. - *Mater. Sci. Technol.*
- 13 Миколаенко В. Анализ деформационного поведения экспериментального сплава системы AL-MG-FE-NI в условиях сверхпластичности. - 2021. *Материалы межвузовской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых специалистов имени Е.В. Арменского* pp 39–42
- 14 Миколаенко В. Коррекция модели деформационного поведения сверхпластических материалов. - 2022. *Материалы межвузовской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых специалистов имени Е.В. Арменского* pp 34–7
- 15 Mosleh A. O. A. O., Mikhaylovskaya A. V. A. V., Kotov A. D. A. D., Kwame J. S. J. S., Aksenov S. A. S. A. Superplasticity of Ti-6Al-4V titanium alloy: Microstructure evolution and constitutive modelling. - 2019. - *Materials (Basel).* - № 12.
- 16 Mosleh A. O., Mikhaylovskaya A. V., Kotov A. D., Portnoy V. K. Arrhenius-type constitutive equation model of superplastic deformation behaviour of titanium-based alloys. - 2018. *Defect and Diffusion Forum*
- 17 Kishchik A. A., Mikhaylovskaya A. V., Kotov A. D., Rofman O. V., Portnoy V. K. Al-Mg-Fe-Ni based alloy for high strain rate superplastic forming. - 2018. - *Mater. Sci. Eng. A.* - № 718. - с. 190–7.