

«2 капитана» («Бороться и искать, найти и не сдаваться»).

- 1. (письменно)** В неравностороннем треугольнике ABC проведены медианы AK и BL . Углы BAC и CBL равны 30° . Найдите $\cos \angle CAB$.
- 2. (письменно)** При каких натуральных n число $2^n + 65$ является точным квадратом?
- 3. (устно)** В треугольнике ABC медианы AD и BE пересекаются в точке M под прямым углом. Докажите, что $AC + BC > 3AB$.
- 4. (ответ)** Произведение трёх натуральных чисел равно 72000. Какое наименьшее значение может принимать их НОК – наименьшее общее кратное?
- 5. (письменно)** По кругу по порядку расположены все натуральные числа от 1 до 2006. Разрешается вычитать из двух соседних чисел число, не превосходящее меньшего из них. Могут ли в результате этих действий получиться одни нули?
- 6. (устно)** M – середина медианы AD треугольника ABC , имеющего площадь S . Прямая BM пересекает сторону AC в точке F . Найдите площадь треугольника AMF .
- 7. (письменно)** В белом квадрате 7×7 поочередно закрашиваются в чёрный цвет клетки, у которых до покраски было не более одной чёрной вершины. Какое наибольшее количество клеток можно закрасить таким образом?
- 8. (письменно)** Пусть a, b, c – стороны треугольника. Докажите неравенство $a^3 + b^3 + 3abc > c^3$.
- 9. (ответ)** В однокруговом (каждая команда с каждой сыграла ровно один раз) футбольном турнире играли 6 команд (победа – 3 очка, ничья – 1, поражение – 0). Сколько очков могла набрать команда, если про остальные пять команд известно, что они набрали 15, 10, 3, 3 и 3 очка?
- 10. (письменно)** В клетках квадрата 3×3 расставлены все натуральные числа от 1 до 9. В каком наибольшем количестве уголков из трёх клеток сумма может быть кратной 3?
- 11. (ответ)** Найдите натуральное число, равное $1/50$ суммы всех предшествующих ему чётных натуральных чисел.
- 12. (письменно)** При каких натуральных $n \geq 3$ существует решение системы неравенств
$$\begin{cases} a_1 + a_2 > 0, \\ a_2 + a_3 < 0, \\ \dots \\ a_{n-1} + a_n >< 0, \\ a_n + a_1 >< 0. \end{cases}$$
 , где знак в последнем неравенстве выбирается в зависимости от чётности n с учётом чередования знаков $>$ и $<$ в неравенствах?
- 13. (устно)** Сумма четырёх точных квадратов равна 2006. Сколько среди них могло быть нечётных чисел?
- 14. (ответ)** Расставьте в квадрате 4×4 все натуральные числа от 1 до 16 так, чтобы в любом квадрате 2×2 сумма всех чисел была кратна 4.
- 15. (устно)** Все вершины выпуклого n -угольника имеют целочисленные координаты, при этом внутри и на сторонах этого n -угольника больше нет точек с целыми координатами. Какие значения может принимать n ?
- 16. (письменно)** В однокруговом (каждый с каждым играет ровно один раз) чемпионате школы по шахматам среди 16 школьников каждому осталось сыграть по 3 матча. Верно ли, что за три дня можно провести три тура так, что каждый школьник сыграет каждый день ровно по одной из своих оставшихся партий?