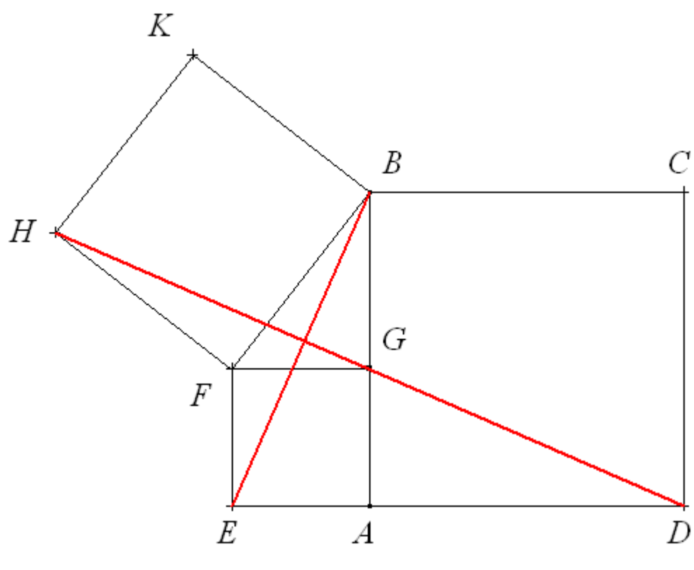
X Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок»
IX Южный математический турнир.
Старт-лига. 1 тур. 21 сентября 2014 года.
Решения.

1. Из палок длиной 1 собран каркас тетраэдра. Баба Яга сажает на каркас 7 пауков. Из расстояний между парами пауков (измеряемых кратчайшим путём по ребрам тетраэдра) Кащей выбирает наименьшее расстояние *R* и платит Яге *R* кг золота. Какое наибольшее количество золота может себе обеспечить Яга? *(С.Г.Волченков, А.В.Шаповалов)*

Ответ: 3/4. ***Решение:*** Каждый паук находится хотя бы в двух гранях тетраэдра (ровно двух – в случае ребра, и в трёх – в случае вершины). Тогда на четырёх контурах граней с учётом повторов находится как бы не менее 14=2·7 пауков. Значит, по принципу Дирихле существует контур, на котором разместятся хотя бы 4 паука. Т.к. длина контура равна 3 и он разбит как минимум на 4 куска между соседними пауками, то опять таки по принципу Дирихле найдутся два паука на расстоянии не более чем 3/4. Значит, более чем 3/4 кг Яга получить не может. Приведём пример, когда она сможет получить 3/4 кг. Пусть один паук сидит в вершине *A* тетраэдра *ABCD*, на расстоянии 3/4 от вершины *A* на трёх рёбрах *AB*, *AC* и *AD* сидят ещё по одному пауку. Остальные три паука сидят в серединах оставшихся трёх рёбер *BC*, *CD* и *DB*. Тогда расстояние между любыми двумя ближайшими пауками будет равно 3/4.

2. На экране компьютера – натуральное число. Каждую секунду Петя умножает его на 9, а затем стирает одну из цифр (но не первую). Докажите, что рано или поздно появится однозначное число, либо какое-то из чисел появится на экране не в первый раз. *(А.В.Шаповалов)*

Решение: Заметим, что после умножения на 9 у нового числа либо увеличится на единицу количество цифр, либо сохранится, т.к. оно меньше удесятерённого числа, у которого цифр ровно на одну больше. После стирания цифры количество цифр уменьшится на 1, значит, после данной нам двойной операции количество цифр в сравнении с исходным числом либо остаётся прежним, либо уменьшается. Значит, при достаточно долгом выполнении операции либо появится однозначное число, либо количество появившихся чисел превысит количество всех возможных чисел, по длине не превышающих *n* цифр, где *n* – количество цифр начального числа. Значит, в этом случае по принципу Дирихле в некоторый момент произойдёт повтор числа.



3. На плоскости даны 3 неперекрывающихся квадрата *ABCD*, *AEFG* и *BFHK*, где вершина *G* лежит на стороне *AB*. Докажите, что точка *G* – середина отрезка *DH*. *(Д.Ю.Кузнецов)*

Решение: При повороте на 90° (против часовой стрелки – см. рис.) относительно точки A прямоугольный треугольник ADG переходит в равный ему треугольник ABE, а при повороте на 90° в ту же сторону относительно точки F тупоугольный треугольник FBE переходит в треугольник FHG, значит, отрезок BE равен и перпендикулярен отрезкам DG, HG, которые как следствие являются продолжением друг друга. Значит, G – середина отрезка DH.

4. Двое юношей и несколько девушек на трёхместной лодке переправились с левого берега реки на правый. Каждый юноша хотя бы раз пересёк реку с каждой девушкой (при этом в лодке могло быть и трое). Могло ли количество рейсов с левого берега на правый быть меньше числа девушек? *(А.В.Шаповалов)*

Ответ: Могло, например, при 9 девушках. ***Пример*:** Обозначим юношей А, Б, а девушек цифрами, → рейс с левого на правый берег, ← обратный рейс. Тогда за 8 рейсов (с левого берега на правый) можно перевезти 9 девушек: АБ7→, А←, А12→, Б12←, Б34→, А34←, А56→, Б56←, 123→, А←, АБ8→, А←, 456→, Б←, АБ9→.

5. Ненулевые числа x, y, z не равны 0 и x+2y+4z=0. Чему может быть равно выражение $\frac{x^2}{8yz}+\frac{y^2}{xz}+\frac{8z^2}{xy}$?

Ответ: 3. ***Решение:*** Сделаем для удобства замену переменных $a=x$, $b=2y$, $c=4z$, тогда $a+b+c=0$ и надо найти значение выражения $\frac{x^2}{8yz}+\frac{y^2}{xz}+\frac{8z^2}{xy}=\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}$, которое с учётом равенства $c = -a-b$ равно

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=\frac{a^3+b^3-(a+b)^3}{abc}=\frac{a^3+b^3-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3}{abc}=\frac{-3ab(a+b)}{abc}=$$

$$=\frac{3abc}{abc}=3.$$

6. Артур разделил некоторое натуральное число на 333 и обнаружил, что сумма неполного частного (ненулевое число) и остатка равна 300. Тимур разделил то же самое число на 777 и тоже обнаружил, что сумма неполного частного (ненулевое число) и остатка равна 300. Найдите исходное число.

Ответ: 64708. ***Решение*:** Из условия следует, что наше число $n=333a+p=777b+q$, где a и b – неполные частные, p и q – остатки. Кроме того, $a+p=b+q=300$. Вычтем из первого равенства второе, тогда $332a=776b$, откуда $83a=194b$. Значит, в силу взаимной простоты чисел 83 и 194 получим, что $a=194k$, $b=83k$, где k – натуральное число. Тогда двойное уравнение $a+p=b+q=300$ превращается в уравнение $194k+p=83k+q=300$, где k – натуральное, а p и q - целые неотрицательные числа. Значит, решение этого уравнения возможно только при $k=1$. Тогда $p=106$, $q=217$, $a=194$, $b=83$, $n=333\cdot194+106=777\cdot83+217=64708$.

7. Каждому из трех математиков написали на лбу натуральное число, причем квадрат одного из этих чисел равен произведению двух других, и самое большее из чисел делится на остальные. Математикам

обо всём этом сообщили. Математик не видит, что написано у него на лбу, но видит, что написано у других. Первый сказал, что не может догадаться, какое число написано у него на лбу. После этого то же самое сказал второй математик, а затем и третий. Тогда первый сказал: «Я знаю, что у меня на лбу написано число 2000». Какое ещё число наверняка написано на чьём-нибудь лбу? *(А.В.Шаповалов)*

Ответ: Такого числа нет. ***Решение:*** Ясно, что если какие-то два числа равны, то им равно и третье. Но тогда первый сразу же бы вычислил своё число. Значит, все числа различны. Пусть у математиков *A*, *B*, *C* написаны соответственно числа $a<b<c$. Так как $b^2=ac$, то b/a тоже целое (оно равно c/b). Тогда у *A* есть выбор между a и $c^2/a>c$, а у В – между b и $c^2/b>c$. Это значит, что если кто-то видит большее чем у него число, оно должен сказать «Не знаю» (ведь предыдущие «Не знаю» не исключают возможности, что именно его число самое большое).

Возможны варианты: 1) у первого – 2000, у второго – 20, у третьего – 200 или у первого – 2000, у второго – 125, у третьего – 500.

В первом случае *C* говорит «Не знаю», поскольку не исключено ещё $c=2$. Второй и третий говорят «не знаю», так как видят большее число. Теперь *C* понимает, что при $c=2$ третий видел бы 2 и 20, и определил бы своё число. Поэтому *C* называет 2000.

Во втором случае *C* говорит «Не знаю», поскольку не исключено ещё $c=250$. Второй и третий говорят «не знаю», так как видят большее число. Теперь *C* понимает, что при $c=250$ третий видел бы 250 и 125 и определил бы своё число. Поэтому *C* называет 2000.

8. Рассмотрим всевозможные графики функций вида $y=kx+b$, где k и b – двузначные числа. Какое наибольшие число таких графиков может пересекаться в одной точке, не лежащей на осях координат? *(С.Г.Волченков, А.В.Шаповалов)*

Ответ: 90, например, графики функций $y=kx+(109–k)$ пересекаются в точке (1;109), где k – любое двузначное число. ***Доказательство оценки:*** При любом фиксированном k прямые такого вида будут параллельны между собой, значит, для каждого возможного k (всего 90 вариантов) существует не более одной прямой, проходящей через некоторую общую точку нужного нам множества прямых, т.е. это множество содержит не более 90 прямых.